Distributietheorie 10-8-'98

Tentamenopgave

I

Beschouw de differentiaaloperator D gedefinieerd door $Df = (\frac{d}{dx})^2 f - \frac{d}{dx} f - 2f$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (Y de Heaviside één stap functie).

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, f(0) = -1, f'(0) = 0$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?

5. Zij F een functie van de klasse C^2 op $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden op F bestaat er een continue functie f op $\mathbb{R}$ die voldoet aan de volgende convolutievergelijking? Bepaal in dat geval de oplossing f.

$$\int_0^x f(x-y)(e^{2y} - e^{-y})dy = F(x) \quad \forall\, x \geq 0 \tag{2}$$

II

1. Definieer het begrip van convergentie van distributies $T_n \to T$, $n \in \mathbb{N}$, of $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, waar $T_n, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Toon aan dat de afbeelding $\frac{d}{dx} : T \mapsto T'$ continu is van $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.w.z. $T_n \to T$ impliceert $T'_n \to T'$.

3. Geef een voorbeeld van een rij continu differentieerbare functies $(f_n)_{n\geq 1}$ zodat $T_{f_n} \to \delta$.

4. Construeer een rij continue functies $(g_n)_{n\geq 1}$ zodat $T_{g_n} \to \delta'$.

III

1. Geef de definitie van convolutie-algebra $\mathcal{A}$ en van het begrip inverse van een distributie $T \in \mathcal{A}$. Toon aan dat als $T \in \mathcal{A}$ een inverse heeft deze uniek is bepaald.

2. Toon aan dat de verzameling

$$\mathcal{A}_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \exists\, m \in \mathbb{R}, \mathrm{dr}(T) \subset [m, +\infty)\}$$

een convolutie-algebra is.

3. Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ de Dirac delta distributie δ_a tot $\mathcal{A}_+$ behoort en een inverse heeft in $\mathcal{A}_+$. Voor welke a en b in $\mathbb{R}$ heeft $\delta_a - \delta_b$ een inverse in $\mathcal{A}_+$?

4. Zij $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Toon aan dat $T_\varphi \in \mathcal{A}_+$ en dat T_φ geen inverse heeft in $\mathcal{A}_+$.